

**KONTROL OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN MALARIA
DENGAN KELAS TANPA GEJALA DAN SUPERINFEKSI**

SKRIPSI

oleh:
DWI KARTIKA SARI
135090400111011



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018**

KONTROL OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN MALARIA DENGAN KELAS TANPA GEJALA DAN SUPERINFEKSI

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
dalam bidang Matematika

oleh:

DWI KARTIKA SARI
135090400111011



PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2018

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI
KONTROL OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN MALARIA
DENGAN KELAS TANPA GEJALA DAN SUPERINFEKSI

oleh:
DWI KARTIKA SARI
135090400111011

Setelah dipertahankan di depan majelis penguji
pada tanggal 03 Januari 2018
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing

Dra. Trisilowati., M.Sc., Ph.D
NIP. 196309261989032001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : DWI KARTIKA SARI
NIM : 135090400111011
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Kontrol Optimal pada Model Penyebaran Malaria dengan Kelas Tanpa Gejala dan Superinfeksi

Dengan ini menyatakan bahwa :

- 1. isi dari skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini.**
- 2. apabila dikemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 03 Januari 2018
Yang menyatakan,

Dwi Kartika Sari
NIM. 135090400111011

KONTROL OPTIMAL PADA MODEL PENYEBARAN MALARIA DENGAN KELAS TANPA GEJALA DAN SUPERINFEKSI

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas kontrol optimal pada model penyebaran malaria dengan kelas tanpa gejala dan superinfeksi. Pada model diberikan dua kontrol yaitu kontrol *bed net* dan kontrol pengobatan. Tujuan kontrol optimal adalah meminimumkan jumlah subpopulasi individu yang terinfeksi dengan dan tanpa gejala serta meminimumkan biaya kontrol. Kontrol optimal diperoleh dengan menerapkan Prinsip Pontryagin, kemudian diselesaikan secara numerik dengan metode *Sweep* Maju-Mundur. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa laju superinfeksi memberikan pengaruh yang cukup signifikan terhadap perubahan jumlah subpopulasi individu terinfeksi dan pemberian kombinasi kedua kontrol merupakan kontrol optimal yang paling efektif.

Kata kunci: Kontrol optimal, malaria, superinfeksi, metode *Sweep* Maju-Mundur, prinsip Pontryagin.

OPTIMAL CONTROL OF A MALARIA MODEL WITH ASYMPTOMATIC CLASS AND SUPERINFECTION

ABSTRACT

This final project presents an optimal control of malaria spread with asymptomatic class and superinfection. In this model, it is given two controls: bed net use and treatment. The purpose of this optimal control is to minimize the number of infected with and without symptomatic as well as minimize cost of the controls. Optimal control is obtained by applying Pontryagin Principle, and numerically simulated by using Forward-Backward Sweep Method. Numerical simulations show that superinfection rate gives a significant effect to the number of infected subpopulation and the combination of both controls is the most effective optimal control.

Keywords: Optimal control, malaria, superinfection, Forward-Backward Sweep Methode, Pontryagin Principle.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Robbil ‘alamin, segala puji dan syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan petunjuk, kemudahan serta segala rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ***Kontrol Optimal pada Model Malaria dengan Kelas Tanpa Gejala dan Superinfeksi*** dengan baik dan lancar. Sholawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada

1. Dra. Trisilowati, M.Sc., Ph.D., selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan, semangat, motivasi, dan kesabaran yang telah diberikan selama proses pengerjaan skripsi ini.
2. Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D dan Indah Yanti, S.Si., M.Si, selaku dosen penguji atas saran dan bimbingan yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D., selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si., selaku Ketua Program Studi Matematika
4. Prof.Dr.Drs. Agus Widodo selaku dosen penasihat akademik atas segala bimbingan, semangat, dan motivasi kepada penulis selama dalam perkuliahan.
5. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf, karyawan TU, dan karyawan NOC Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Wagiyem (Ibu), Sopingi (Bapak), Sartun (Nenek), Fitri Apriliani (kakak), Aisyah Nur Hasanah (adik), Chandraningtyas Fitri Calista (Keponakan) dan keluarga yang selalu mendukung, mendoakan, dan memotivasi penulis.
7. Sahabat terdekat, teman-teman seperjuangan Matematika 2013 dan “Tong Family” atas semua motivasi, doa, dukungan, dan bantuannya.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan rahmat-Nya kepada semua pihak yang membantu selama proses pengerjaan

skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun. Kritik dan saran dapat disampaikan melalui email ke alamat dwi.kartika1804@gmail.com. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi inspirasi bagi penulis skripsi selanjutnya.

Malang, 03 Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI.....	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xiii
DAFTAR GAMBAR.....	xv
DAFTAR TABEL.....	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan.....	3
BAB II DASAR TEORI.....	5
2.1 Persamaan Diferensial	5
2.2 Teori Kontrol Optimal	6
2.2.1 Syarat Perlu Kontrol Optimal	7
2.2.2 Prinsip Pontryagin.....	11
2.2.3 Kontrol Optimal dengan Beberapa Variabel.....	12
2.2.4 Langkah-Langkah Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal	13
2.3 Metode Runge-Kutta Orde 4.....	15
2.4 Metode <i>Sweep</i> Maju-Mundur	16
2.5 Model Penyebaran Malaria dengan Kelas Tanpa Gejala dan Superinfeksi	17
2.6 Angka Reproduksi Dasar	23
2.7 Titik Kesetimbangan.....	24

BAB III PEMBAHASAN	29
3.1 Formulasi Model Penyebaran Malaria dengan Kontrol	29
3.2 Penyelesaian Masalah Kontrol Optimal.....	32
3.3 Algoritma metode <i>Sweep</i> Maju-Mundur	40
3.4 Simulasi Numerik dan Interpretasi	41
3.4.1 Simulasi Model Tanpa Kontrol	43
3.4.2 Simulasi Pengaruh Laju Superinfeksi (ρ) Terhadap Subpopulasi Terinfeksi I_h dan A_h	45
3.4.3 Simulasi dengan Kontrol <i>Bed Net</i> (u_1).....	47
3.4.4 Simulasi dengan Kontrol Pengobatan (u_2).....	49
3.4.5 Simulasi dengan Kombinasi Kontrol <i>Bed Net</i> (u_1) dan Pengobatan (u_2)	51
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	55
4.1 Kesimpulan	55
4.2 Saran	55
DAFTAR PUSTAKA	57
LAMPIRAN	61

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1	Diagram kompartemen model penyebaran malaria dengan kelas tanpa gejala dan superinfeksi.....	18
Gambar 3.1	Diagram kompartemen model penyebaran malaria dengan kelas tanpa gejala dan superinfeksi menggunakan kontrol.....	30
Gambar 3.2	Simulasi numerik model penyebaran malaria dengan kelas tanpa gejala dan superinfeksi tanpa kontrol ketika $R_0 < 1$ yang terjadi bebas penyakit	43
Gambar 3.3	Simulasi numerik model penyebaran malaria dengan kelas tanpa gejala dan superinfeksi tanpa kontrol ketika $R_0 > 1$ yang terjadi endemik	44
Gambar 3.4	Pengaruh laju superinfeksi (ρ) terhadap perubahan jumlah subpopulasi I_h tanpa kontrol	45
Gambar 3.5	Pengaruh laju superinfeksi (ρ) terhadap perubahan jumlah subpopulasi A_h tanpa kontrol.....	46
Gambar 3.6	Simulasi numerik model penyebaran malaria dengan kelas tanpa gejala dan superinfeksi menggunakan kontrol <i>bed net</i> (u_1)	47
Gambar 3.7	Profil kontrol optimal penggunaan <i>bed net</i> (u_1^*).....	48
Gambar 3.8	Simulasi numerik model penyebaran malaria dengan kelas tanpa gejala dan superinfeksi menggunakan kontrol pengobatan (u_2).....	49
Gambar 3.9	Profil kontrol optimal pengobatan (u_2^*).....	50
Gambar 3.10	Simulasi numerik model penyebaran malaria dengan kelas tanpa gejala dan superinfeksi menggunakan kontrol <i>bed net</i> (u_1) dan pengobatan (u_2)	52
Gambar 3.11	Profil kontrol optimal penggunaan <i>bed net</i> (u_1^*) dan pengobatan (u_2^*)	53

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Jumlah kemungkinan akar real positif $g(\lambda_h^*)$	26
Tabel 3.1 Nilai parameter untuk simulasi numerik	42
Tabel 3.2 Nilai awal untuk simulasi numerik	42

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Program MATLAB model penyebaran malaria dengan kelas tanpa gejala dan superinfeksi dengan atau tanpa kontrol	61
Lampiran 2 Program MATLAB pengaruh superinfeksi terhadap subpopulasi terinfeksi pada model penyebaran malaria	71

DAFTAR SIMBOL

N_h	: total populasi manusia
N_v	: total populasi nyamuk
λ_h	: laju infeksi pada individu
λ_v	: laju infeksi pada nyamuk
S_h	: kelas individu rentan
E_h	: kelas individu terpapar
I_h	: kelas individu terinfeksi dengan gejala
A_h	: kelas individu terinfeksi tanpa gejala
R_h	: kelas individu sembuh dengan kekebalan sementara
S_v	: kelas nyamuk rentan
E_v	: kelas nyamuk terpapar
I_v	: kelas nyamuk terinfeksi
Λ_h	: tingkat kelahiran individu
Λ_v	: tingkat kelahiran nyamuk
μ_h	: laju kematian alami individu
μ_v	: laju kematian alami nyamuk
β_h	: laju kontak interaksi dari nyamuk terinfeksi terhadap individu rentan
ρ	: laju superinfeksi pada individu terinfeksi tanpa gejala
β_v	: laju kontak interaksi dari individu terinfeksi terhadap nyamuk rentan
σ	: meningkatkan infeksi dari individu terinfeksi tanpa gejala ke nyamuk rentan
γ_h	: laju pengobatan
γ_u	: laju kehilangan kekebalan pada individu
δ_h	: laju kematian akibat penyakit pada individu
γ_e	: tingkat dimana individu terpapar menjadi terinfeksi
γ_v	: tingkat dimana nyamuk terpapar menjadi terinfeksi
α	: probabilitas dari individu terpapar menjadi terinfeksi dengan gejala
θ_h	: probabilitas dari individu terinfeksi dengan gejala menjadi rentan
γ_a	: laju pemulihan pada individu terinfeksi tanpa gejala
u_1	: kontrol penggunaan <i>bed net</i>
u_2	: kontrol pengobatan

- w_1 : bobot subpopulasi terinfeksi dengan gejala
- w_2 : bobot subpopulasi terinfeksi tanpa gejala
- w_3 : bobot biaya kontrol *bed net*
- w_4 : bobot biaya kontrol pengobatan